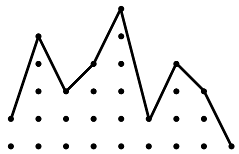
O zliczaniu multidrzew porządkowych za pomocą ścieżek kratowych

Maciej Dziemiańczuk
Instytut Informatyki, Uniwersytet Gdański

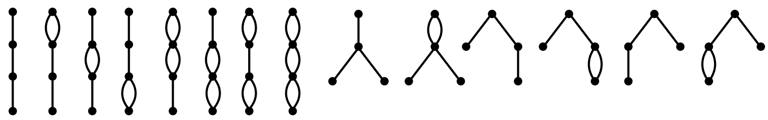
Streszczenie

Ścieżka kratowa to skończony ciąg punktów $p_0, p_1, \ldots, p_n$ kraty $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dla $N \geqslant 0$, *ścieżka N-Raneya* długości n to ścieżka kratowa $(p_0, \ldots, p_n)$ idąca z punktu $p_0 = (0,1)$ do $p_n = (n,0)$, której jedynym punktem poniżej prostej $y = 1$ jest punkt końcowy oraz $p_i - p_{i-1} \in \{(1,N),(1,N-1),\ldots\}$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$. Oznaczmy przez $\mathcal{R}_N(n)$ rodzinę wszystkich ścieżek N-Raneya długości n.



Rysunek 1: Przykład ścieżki 3-Raneya długości 8.

Drzewo porządkowe (ang. *plane tree* oraz *ordered* trees) to nieetykietowane ukorzenione drzewo, w którym każdy wierzchołek wewnętrzny ma ustalony porządek liniowy swoich synów. Drzewo porządkowe, w którym krawędzie mają dodatkowo przypisane całkowite liczby dodatnie, nazywane *wagami*, oraz suma wag wychodzących z dowolnego wierzchołka w kierunku jego synów jest ograniczona z góry przez N, nazywamy *N-arnym multidrzewem porządkowym*. Oznaczmy przez $\mathcal{T}_N(n)$ rodzinę wszystkich N-arnych multidrzew porządkowych na n wierzchołkach.



Rysunek 2: Wszystkie 2-arne multidrzewa porządkowe na czterech wierzchołkach.

Głównym wynikiem, który zostanie przedstawiony na referacie jest bijekcja pomiędzy rodziną $\mathcal{R}_N(n)$ oraz $\mathcal{T}_{N+1}(n)$ dla dowolnych $N, n \geqslant 0$. Ścieżki kratowe są strukturą prostszą z punktu widzenia zliczania, dlatego korzystając z tej bijekcji udowodnimy, że dla $N, n \geqslant 1$, liczba N-arnych multidrzew porządkowych na n wierzchołkach jest odpowiednią liczbą Fuss-Catalana, tzn.

$$|\mathcal{T}_N(n)| = \frac{1}{n}\binom{Nn}{n-1}.$$

Pokażemy również, że liczba N-arnych multidrzew porządkowych na n wierzchołkach, które mają dokładnie k liści jest równa

$$\frac{1}{n}\binom{n}{k}\sum_{s=0}^{n-k}(-1)^s\binom{n-k}{s}\binom{N(n-k-s)}{n-1}$$

oraz, że stosunek liczby liści do liczby wszystkich wierzchołków w N-arnym multidrzewie porządkowym, gdy $N \to \infty$ oraz $n \to 0$, jest równy $1/e$.