Rozróżnianie sąsiadów w grafach - algorytmy wspomagane kombinatorycznym twierdzeniem o zerach

Jakub Przybyło

Streszczenie. Rozważmy „kolorowanie” *właściwe* c krawędzi grafu $G = (V,E)$ liczbami ze zbioru $\{1,2,\ldots,k\}$ (lub z dowolnego innego k-elementowego podzbioru zbioru liczb rzeczywistych). Mówimy, że c *rozróżnia sąsiadów przez sumy*, jeżeli $\sum_{w\in N_G(v)} c(wv) \neq \sum_{w\in N_G(u)} c(wu)$ dla każdej krawędzi $uv \in E$. Takie kolorowanie istnieje dla dowolnego grafu bez izolowanych krawędzi, jeżeli $k \geqslant 2\Delta(G)+\mathrm{col}(G)-1$ lub $k \geqslant \Delta(G)+3\mathrm{col}(G)-4$. Dla powyższych dwóch ograniczeń, zaprezentowane zostaną „algorytmiczne” dowody wykorzystujące kombinatoryczne twierdzenie o zerach (*Combinatorial Nullstellensatz*). W konsekwencji ta sama liczba kolorów jest także wystarczająca w przypadku pokrewnego zagadnienia, gdzie zamiast przez sumy, rozróżniamy wierzchołki sąsiednie przez *zbiory* incydentnych z nimi kolorów. W rzeczywistości rozważać będziemy listowe wersje obu problemów i udowodnimy podane ograniczenia w tym ogólniejszym przypadku. Na podstawie drugiego z nich otrzymujemy m. in., iż $k = \Delta(G)+14$ (a nawet $k = \Delta(G)+13$) kolorów wystarczy w przypadku grafów planarnych. Wniosek ten nawiązuje do hipotez Zhanga et al. oraz Flandrin et al., które sugerują, odp. dla pierwszego i drugiego zagadnienia, iż $k = \Delta(G)+2$ kolorów powinno wystarczyć dla dowolnego grafu spójnego rzędu co najmniej trzy, z wyjątkiem C_5.

Akademia Górniczo-Hutnicza, Al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków
E-mail address: przybylo@wms.mat.agh.edu.pl