O WIELOMIANACH WŁĄCZANIA-WYŁĄCZANIA

Bartłomiej Bzdęga

Wielomiany włączania-wyłączania są uogólnieniem wielomianów podziału koła. Dla zbioru liczb naturalnych $\rho = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$, parami względnie pierwszych i większych od 1, określamy

$$Q_\rho = \prod_{\varrho \subseteq \rho} \left(x^{\Pi\varrho} - 1\right)^{(-1)^{\#(\rho \setminus \varrho)}},$$

gdzie $\Pi\varrho$ oznacza iloczyn elementów zbioru ϱ. Dla przykładu

$$Q_{\{q_1,q_2,q_3\}} = \frac{(x^{q_1q_2q_3} - 1)(x^{q_1} - 1)(x^{q_2} - 1)(x^{q_3} - 1)}{(x^{q_2q_3} - 1)(x^{q_3q_1} - 1)(x^{q_1q_2} - 1)(x - 1)}.$$

Jeśli $q_1, q_2, \ldots, q_k$ są liczbami pierwszymi, to wielomian Q_ρ jest identyczny z wielomianem podziału koła $\Phi_{q_1q_2\ldots q_k}$. W przeciwnym razie jest on iloczynem pewnej liczby takich wielomianów.

Współczynniki wielomianów włączania-wyłączania są na ogół bardzo trudne do wyznaczenia, a tym trudniejsze, im większy jest zbiór ρ. Już dla $\#\rho = 3$ nie są znane żadne wzory (w postaci zwartej) na współczynniki Q_ρ. W tej sutuacji rozsądnie jest te współczynniki szacować. Przez A_ρ oznaczamy największy moduł współczynnika wielomianu Q_ρ.

Ustalmy $\rho = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$, gdzie $q_1 < q_2 < \ldots < q_k$. Określmy też

$$M_\rho = \prod_{j=1}^{k-2} q_j^{2^{k-j-1}-1}.$$

Podczas referatu zaprezentuję dowód następującego faktu:

Granica

$$\hat{c} = \lim_{k\to\infty} \lim_{N\to\infty} \sup_{q_1>N} (A_\rho/M_\rho)^{2^{-k}}$$

istnieje i $\hat{c} \in (0.48,\ 0.96)$.

Dowód podzielony będzie na dwie części. W pierwszej podam przykłady takich zbiorów ρ, dla których A_ρ jest odpowiednio duże. W drugiej dowiodę oszacowania górnego, stosując m. in. twierdzenie Spernara o antyłańcuchu.