Rozgrywany podział grafów w klasach grafów topologicznie domkniętych

Bartosz Walczak

Dany jest spójny graf G z nieujemnymi wagami w wierzchołkach. Dwoje graczy zajmuje na przemian wierzchołki grafu G, po jednym w każdym ruchu, tak aby zbiór zajętych wierzchołków po każdym ruchu tworzył spójny podgraf grafu G. Gra kończy się w momencie, gdy wszystkie wierzchołki są zajęte. Celem każdego z graczy jest zajęcie wierzchołków o możliwie największej łącznej wadze.

Łatwo wskazać konstrukcję bardzo prostych grafów G (np. drzew) o parzystej liczbie wierzchołków, dla których łączna waga, jaką pierwszy gracz jest w stanie sobie zapewnić w proporcji do całkowitej wagi $w(G)$, jest dowolnie bliska zeru. Podobne konstrukcje znane są także dla nieparzystej liczby wierzchołków, jednak w tym przypadku powstają grafy o złożonej strukturze, zawierające minory topologiczne dowolnie dużych klik. Z drugiej strony, jeden z pierwszych znanych wyników dotyczących rozważanej gry mówi, że pierwszy gracz może sobie zapewnić co najmniej $1/4$ całkowitej wagi dowolnego drzewa o nieparzystej liczbie wierzchołków. Przedstawię uogólnienie tego wyniku na klasy grafów topologicznie domknięte: dla każdego grafu H istnieje stała $c > 0$, taka że w grze na dowolnym grafie G o nieparzystej liczbie wierzchołków niezawierającym H jako minora topologicznego pierwszy gracz może sobie zapewnić łączną wagę co najmniej $c \cdot w(G)$. Głównym składnikiem dowodu jest twierdzenie strukturalne, które mówi w skrócie, że jeżeli G nie zawiera H jako minora topologicznego, to G ma strukturę zbliżoną do cyklu lub istnieje w G spójny zbiór wierzchołków o dobrych własnościach separacji.